数理解析研究所講究録
第 1811 巻 2012 年 13-22

拡大グライス代数と松尾-ノートンの跡公式
On extended Griess algebras and Matsuo-Norton trace formulae

山内 博*

東京女子大学 現代教養学部

1 序文

本稿では頂点作用素代数と位数 2 の自己同型を考え、これが次数分解に関するある仮定を満たすとき、通常のグライス代数の $\mathbb{Z}_2$-拡大として拡大グライス代数を導入します。ここでいう拡大グライス代数は超可換ではなく、通常の意味の可換な代数になります。そして、共形デザイン構造にもとづいて松尾-ノートンの跡公式を拡大グライス代数の奇部分へと拡張します。この話は 2009 年 1 月に数理研で行われた研究集会での講演の続きといいますか、その時やりかけだった話を完成させたものになります。今回の講演では得られた公式の応用についても紹介しましたが、本稿では紙面の都合上、応用部分は省略します。この応用部分はすでに 2009 年の段階でも講演していますので、興味をお持ち頂けた場合はその時の報告集 [Y09] をご覧いただければと思います[註1]。また、結果の詳細は論文 [Y12] にまとめました。こちらも合わせてご覧いただければと思います。

謝辞 松尾厚氏とは跡公式に関する議論を行い、氏の結果について多くを学ばせてもらいました。また、マセマティカのプログラムも送って頂きました。宮本雅彦氏には超代数構造だけではなく、任意の位数 2 の自己同型でも拡大グライス代数が定義できると指摘され、実際そのように一般化することができました。お二人に感謝いたします。

2 頂点作用素超代数の拡大グライス代数

本稿では次の条件を満足する頂点作用素超代数 V を考えます。

*本研究は科研費若手 (スタートアップ) 19840025 および若手 (B) 21740011 の助成を受けたものである。

[註1] ただ、[Y09] には (著者の勘違いによる) いくつかの誤りがあります。誤りの部分は本稿でもう一度とりあげ、修正しています。

条件 1. $V = V^0 \oplus V^1$ を頂点作用素超代数、$g \in \mathrm{Aut}(V)$ を位数 2 の自己同型とし、$V^{\pm} := \{a \in V \mid ga = \pm a\}$ とおくとき、次が成り立つ。
(1) V は自己双対的である。
(2) V は $V^0 = \oplus_{n\geq 0} V_n$, $V^1 = \oplus_{n \geq 0} V_{n+k/2}$ なる $L(0)$-分解を持つ。($V^1 = 0$ もあり得る。)
(3) $V^{\pm}$ は $V^+ = V_0 \oplus V_2 \oplus (\oplus_{n>2} V_n)$, $V^- = V_h \oplus (\oplus_{n>h} V_h)$ なる分解を持つ。ここで $V_h \neq 0$ は V^- のトップレベルであり、$h \in \frac{1}{2}\mathbb{Z}$ はそのトップウェイトである。

以下、$V^{0,+} = V^0 \cap V^+$ とします。$V_h \subset V^-$ は V^- の**トップレベル**と呼ばれ、そのウェイト h を V^- の**トップウェイト**といいます。条件から $V_h \subset V^0$ ならば $h \in \mathbb{Z}$, $V_h \subset V^1$ ならば $h \in \mathbb{Z} + 1/2$ であり、V_2 は $V^{0,+}$ のグライス代数になります。

2.1 頂点作用素超代数上の不変内積

準備として不変内積の概念を頂点作用素超代数まで拡張します。頂点作用素超代数 $V = V^0 \oplus V^1$ 上の内積 $(\cdot \mid \cdot)_{\pm}$ が任意の $a, u, v \in V$ に対して以下の条件を満たすとき、**不変内積**と呼ばれます。

$$
\begin{aligned}
&(Y(a,z)u \mid v)_{\pm} = (u \mid Y^*_{\pm}(a,z)v)_{\pm}, \\
&Y^*_{\pm}(a,z) := Y(e^{zL(1)} z^{-2L(0)} (-1)^{L(0) \pm 2L(0)^2} a, z^{-1}).
\end{aligned}
\tag{2.1}
$$

頂点作用素超代数の場合、その $\mathbb{Z}_2$-次数性により奇部分の内積は ± 1 倍する自由度があり、$(\cdot \mid \cdot)_+$ と $(\cdot \mid \cdot)_-$ は互いの $\mathbb{Z}_2$-共役になります。条件 1 より $L(0)$-斉次な $a \in V$ について $(-1)^{L(0) \pm 2L(0)^2} a = \pm a$ となることに注意します。特に $Y^{**}_{\pm}(a,z) = Y_{\pm}(a,z)$ が成り立ちます。頂点作用素代数の場合と同様に、次が成り立ちます。

命題 2.1. ([FHL93, Li94]) 頂点作用素超代数 V 上の不変内積のなす空間は線形空間として $\mathrm{Hom}_{\mathbb{C}}(V_0/L(1)V_1, \mathbb{C})$ と同型である。特に条件 1 のもとでは V 上の不変内積は定数倍と $\mathbb{Z}_2$-共役を除いて一意的に定まる。

注釈 2.2. [Li94] では頂点作用素代数の場合のみ扱われていますが、全く同じ議論で頂点作用素超代数の場合もカバーできます。なお、この結果から特に単純な頂点作用素超代数 $V = V^0 \oplus V^1$ 上の不変内積の空間はその偶部分 V^0 上の不変内積の空間と一致することも分かります。すなわち、偶部分 V^0 が不変内積を持てば、それは V へと ($\pm$ の選択を除いて) 一意に拡張することができます。

2.2 拡大グライス代数

$V = V^0 \oplus V^1 = V^+ \oplus V^-$ を条件 1 を満たす頂点作用素超代数とします。$V_h \subset V^1$ のとき、随伴作用素を以下のように選んで不変内積の符号を決めます[註2]。

$$Y^*(a,z) = \begin{cases} Y(e^{zL(1)}z^{-2L(0)}(-1)^{L(0)-2L(0)^2}a, z^{-1}) & (h \equiv 1/2 \mod 2 \text{ のとき}) \\ Y(e^{zL(1)}z^{-2L(0)}(-1)^{L(0)+2L(0)^2}a, z^{-1}) & (h \equiv 3/2 \mod 2 \text{ のとき}) \end{cases} \tag{2.2}$$

これは $Y^*(a,z) = \sum_{n\in\mathbb{Z}} a^*_{(n)} z^{-n-1}$ と展開したとき次を満たします。

$$a^*_{(n)} = \epsilon_h (-1)^{\mathrm{wt}(a)-h} \sum_{i=0}^{\infty} \frac{1}{i!} \left(L(1)^i a\right)_{(2\mathrm{wt}(a)-n-2-i)}, \tag{2.3}$$

ここで符号 $\epsilon_h \in \{\pm 1\}$ は次で定めます。

$$\epsilon_h = \begin{cases} (-1)^h & (h \in \mathbb{Z} \text{ のとき}) \\ 1 & (h \in \mathbb{Z} + 1/2 \text{ のとき}) \end{cases} \tag{2.4}$$

特に、$u, v \in V_h$ ならば $(u \mid v)\mathbb{1} = \epsilon_h u_{(2h-1)} v$ が成り立ちます。

$a, b \in V_2$, $u, v \in V_h$ として部分空間 $V_2 \oplus V_h$ に積及び内積を以下のように定義します[註3]。

$$\begin{aligned} &ab := a_{(1)}b, \quad au := a_{(1)}u, \quad ua := u_{(1)}a, \quad uv := u_{(2h-3)}v, \\ &(a|b)\mathbb{1} = a_{(3)}b, \quad (u|v)\mathbb{1} = u_{(2h-1)}v, \quad (a|u) = (u|a) = 0. \end{aligned} \tag{2.5}$$

命題 2.3. 上記の (2.5) で定めた積及び内積は $V_2 \oplus V_h$ 上に単位元を持つ不変内積付き可換代数構造を定める。ここで内積の不変性は $u \in V_h$ のとき $(xu|y) = \epsilon_h (x|uy)$ と修正する。

V の偶部分 V^+ を考えた場合、その次数 2 の空間 V_2 は命題 2.3 で定まる代数の部分代数になり、通常 V^+ のグライス代数と呼ばれます。命題 2.3 はグライス代数の定義を $\mathbb{Z}_2$-次数付き頂点作用素超代数へ一般化したものと考えられます。$V_2^+ \oplus V_h^-$ は通常のグライス代数 V_2 の拡大をなしているので、これを頂点作用素超代数 V の**拡大グライス代数**と呼ぶことにします。

2.3 巾等元の平方根

拡大グライス代数における巾等元とその平方根を考えます。まず、通常のグライス代数の場合には次の結果が知られています。

[註2] すなわち $h \equiv 1/2 \mod 2$ のとき $(\cdot|\cdot)_-$ を、$h \equiv 3/2 \mod 2$ のとき $(\cdot|\cdot)_+$ を使います。
[註3] この内積は上記の規格化のもとで V 上の不変内積を $V_2^+ \oplus V_h^-$ に制限したものです。

補題 2.4. ([Mi96, La99]) 頂点作用素代数 V において $e \in V_2$ が中心電荷 c のヴィラソロ元であることは $e_{(1)}e = e$, $2e_{(3)}e = c\mathbb{1}$ を満たすことと同値である。

この命題より $V_1 = 0$ なる頂点作用素代数 V において $e \in V_2$ がヴィラソロ元であることと $e/2$ がグライス代数 V_2 において巾等元であることは同値になります。そのためグライス代数において巾等元を調べることは重要になります。拡大グライス代数では奇部分において巾等元の平方根を考えることができます。$V = V^0 \oplus V^1$ を頂点作用素超代数、$\theta = (-1)^{2L(0)}$ をその $\mathbb{Z}_2$-共役写像とし、以下では V と θ が条件 1 を満たすものとします。$V_2 \oplus V_h$ をその拡大グライス代数、$a \in V_2$ を巾等元とし、$x \in V_h$ が拡大グライス代数において $xx = a$ を満たしたとします。このとき x の生成する V における部分代数の構造は $h < 3$ のときは [Y09, Y12] において議論されており、いくつかの仮定のもとでほぼ決定できることが分かっています。ここでは結果だけをまとめておきます。

命題 2.5. 頂点作用素超代数 $V = V^0 \oplus V^1$ および $\theta = (-1)^{2L(0)}$ は条件 1 を満たすものとする。h を V^1 のトップウェイトとし、拡大グライス代数 $V_2 \oplus V_h \subset V^0 \oplus V^1$ において $a \in V_2$ は巾等元、$x \in V_h$ はその平方根、すなわち $xx = a$ を満たしたとする。このとき次が成り立つ。

(1) $h = 1/2$ のとき $\langle x \rangle \simeq L(1/2, 0) \oplus L(1/2, 1/2)$ となる。

(2) $h = 3/2$ のときヴィラソロ元 $2a$ が $\langle x \rangle$ の共形ベクトルであるならば、$\langle x \rangle$ は $N = 1$ $c = 8(a|a)$ ヴィラソロ頂点作用素超代数と同型になる。

(3) ([Za85]) $h = 5/2$ のときヴィラソロ元 $2a$ が $\langle x \rangle$ の共形ベクトルであり、さらに $n \geq 0$ に対し $x_{(n)}x \in \langle a \rangle$ が成り立つならば $\langle x \rangle$ は $L(-13/14, 0) \oplus L(-13/14, 5/2)$ を単純商に持つ。

(ここで $L(c, h)$ は中心電荷 c, 最高ウェイト h の既約最高ウェイトヴィラソロ加群を表す。)

3 拡大グライス代数上の跡公式

V を頂点作用素超代数、$\omega \in V_2$ をその共形ベクトルとします。以下では次の条件を満たす頂点作用素超代数を考察します。

条件 2. 頂点作用素超代数 V は設定 1 を満たしており、さらに以下を満たす。

(1) V 上の不変内積は非退化である。

(2) V 上の不変内積を $\langle \omega \rangle$ に制限したものも非退化である。

(3) V は $\langle \omega \rangle$-加群として最高ウェイト加群の直和である。

$n \in \frac{1}{2}\mathbb{Z}$ に対し V の最高ウェイト m の最高ウェイト $\langle \omega \rangle$-部分加群全体の和を $V[n]$ とすれば、上記の設定の下で V は $\mathrm{Vir}(\omega)$-加群として次のように分解します。

$$V = \bigoplus_{n \in \frac{1}{2}\mathbb{Z}} V[n] \tag{3.1}$$

ここで設定 1 より $V[0] = \langle\omega\rangle$ であり、$\langle\omega\rangle$-加群として次の完全列がとれます。

$$0 \longrightarrow \bigoplus_{n>0} V(n) \longrightarrow V \xrightarrow{\pi} V[0] = \langle\omega\rangle \longrightarrow 0. \tag{3.2}$$

3.1 共形デザインと一般カシミール元

V を条件 2 を満たす頂点作用素超代数、$\pi : V \to V[0] = \langle\omega\rangle$ を (3.1) にある射影として、共形デザインと $\mathcal{S}^n$ 級の概念を導入します。

定義 3.1. (1) ([H08]) V-加群 M の $L(0)$-斉次部分空間 X が V 上の**共形 t-デザイン**をなすとは、任意の $a \in V$ について $\mathrm{tr}_X \mathrm{o}(a) = \mathrm{tr}_X \mathrm{o}(\pi(a))$ が成り立つことと定める。
(2) ([Ma01]) V が $\mathcal{S}^n$ **級**であるとは、$G = \mathrm{Aut}(V)$ として G-不動点部分代数 V^G が $m \le n$ ならば $V^G_m \subset \langle\omega\rangle$ を満たすことと定める。

共形デザインの定義条件は [Ma01] において跡公式を導出するための条件として考察されています。共形デザインと $\mathcal{S}^n$ 級の間には次の関係が成り立ちます。

補題 3.2. ([Ma01, H08]) V は $\mathcal{S}^n$ 級、$G = \mathrm{Aut}(V)$ として V-加群 M が G-安定であり、かつ M 上に G の射影表現が存在するならば、M のすべての $L(0)$-斉次空間は V 上の共形 n-デザインをなす。

補題 3.3. $m > 0$ に対し (3.1) に現れる部分空間 $V[m]$ と $V[0] = \langle\omega\rangle$ は不変内積に関して直交する。

拡大グライス代数 $V_2 \oplus V_h \subset V^+ \oplus V^-$ を考えます。V^- のトップレベル V_h の基底 $\{u^i \mid 1 \le i \le \dim V_h\}$ を一つとり、その双対基底を $\{u_i \mid 1 \le i \le \dim V_h\}$ とします。このとき次で定まるベクトル

$$\kappa_m := \epsilon_h \sum_{i=1}^{\dim V_h} u^i_{(2h-1-m)} u_i \in V_m \tag{3.3}$$

は基底の選び方に依りません。ここで符号 ϵ_h は (2.4) で定めたものです。[Ma01] に従って、κ_m を (m 次の) **一般カシミール元**と呼ぶことにします。

補題 3.4. $L(0)$-斉次な $a \in V$ について $\mathrm{tr}_{V_h} \mathrm{o}(a) = (-1)^{\mathrm{wt}(a)} (a \mid \kappa_{\mathrm{wt}(a)})$ が成り立つ。

【証明】 跡を考えているので $a \in V^+$, $\mathrm{wt}(a) \in \mathbb{Z}$ としてよい。以下 $d = \dim V_h$ とおく。

$$\begin{aligned}
\mathrm{tr}_{V_h} \mathrm{o}(a) &= \sum_{i=1}^{d} (\mathrm{o}(a) u^i \mid u_i) = \sum_{i=1}^{d} (a_{(\mathrm{wt}(a)-1)} u^i \mid u_i) \\
&= \sum_{i=1}^{d} \sum_{j=0}^{\infty} \frac{(-1)^{\mathrm{wt}(a)+j}}{j!} \left(L(-1)^j u^i_{(\mathrm{wt}(a)-1+j)} a \mid u_i \right) \quad \text{(by skew-symmetry)}
\end{aligned}$$

$$= \sum_{i=1}^{d}\sum_{j=0}^{\infty} \frac{(-1)^{\mathrm{wt}(a)+j}}{j!}\epsilon_h\left(a \mid u^i_{(2h-\mathrm{wt}(a)-1+j)}L(1)^j u_i\right) \quad \text{(by invariance)}$$

$$= \sum_{i=1}^{d}(-1)^{\mathrm{wt}(a)}\epsilon_h(a \mid u^i_{(2h-\mathrm{wt}(a)-1)}u_i) \qquad \text{(as } L(1)V_h = 0)$$

$$= (-1)^{\mathrm{wt}(a)}(a \mid \kappa_{\mathrm{wt}(a)}).$$

よって、主張が成り立つ。 ∎

命題 3.5. トップレベル V_h が $V^{0,+}$ 上の共形 t-デザインであることは n 以下の m について $\kappa_m \in \langle\omega\rangle$ であることと同値である。

【証明】 補題 3.4 より $\mathrm{tr}_{V_h} o(a) = \mathrm{tr}_{V_h} o(\pi(a)) \iff (a \mid \kappa_{\mathrm{wt}(a)}) = (\pi(a) \mid \kappa_{\mathrm{wt}(a)})$ である。π は射影だったので $V_m \cap \ker\pi = \{a-\pi(a) \mid a \in V_m\}$ が成り立つので、$(a-\pi(a)|\kappa_{\mathrm{wt}(a)}) = 0 \iff \kappa_{\mathrm{wt}(a)} \in \pi(V) = V[0] = \langle\omega\rangle$ である。以上から主張が従う。 ∎

3.2 跡公式の導出

跡公式の導出にあたり、次を仮定します。

条件 3. $1 \le t \le 5$ として V_h が $V^{0,+}$ 上の共形 $2t$-デザインであるとき、V の中心電荷は次の多項式の零点ではない。

$$\begin{aligned} &D_2(c) = c, \quad D_4(c) = c(5c+22), \quad D_6(c) = (2c-1)(7c+68)D_4(c), \\ &D_8(c) = (3c+46)(5c+3)D_6(c), \quad D_{10}(c) = (11c+232)D_8(c). \end{aligned} \tag{3.4}$$

この仮定はヴィラソロ代数上のヴァーマ加群の特異ベクトルの非存在性と関係しています。

補題 3.6. V の中心電荷が (3.4) にある多項式 $D_n(c)$ の零点でないとき、$m \le n$ ならば $\langle\omega\rangle$ の次数 m の部分空間はヴァーマ加群の商 $M(c,0)/M(c,1)$ のそれと線形同型である。

補題 3.6 より次を得ます。

補題 3.7. V の中心電荷は $D_n(c)$ の零点ではないとする。$m \le n$ について $\kappa_m \in \langle\omega\rangle$ が成り立つとする。このとき多項式 $A^{(m)}_{\bullet} \in \mathbb{Q}[c,d,h]$ が一意的に存在して κ_m は次のように表せる。

$$\kappa_m = \frac{1}{D_{2\lfloor m/2\rfloor}(c)} \sum_{\substack{n_1\ge\cdots\ge n_k>1 \\ n_1+\cdots+n_k=m}} A^{(m)}_{[n_1,\ldots,n_k]}L(-n_1)\cdots L(-n_k)\mathbb{1},$$

ここで $\lfloor m/2\rfloor$ は $m/2$ を超えない最大の整数を表す。

V_h は V^- のトップレベルでしたので、ゼロモードはズー代数の作用により記述できます。

補題 3.8. ([Zh96]) $a \in V_2$, $b \in V$, $v \in V_h$ のとき次が成り立つ。

$$\mathrm{o}(a)\mathrm{o}(b)v = \mathrm{o}(a*b)v, \quad a*b = \sum_{i=0}^{2}\binom{2}{i}a_{(i-1)}b$$

以上の準備のもとで、跡公式が導出できます。以下の導出方法は [Ma01] のものです。補題 3.8 より

$$\mathrm{tr}_{V_h}\mathrm{o}(a^1)\cdots\mathrm{o}(a^t) = \mathrm{tr}_{V_h}\mathrm{o}(a^1*\cdots*a^t) \tag{3.5}$$

が成り立ちます。補題 3.4 より $L(0)$-斉次な $a \in V$ について $\mathrm{tr}_{V_h}\mathrm{o}(a) = (-1)^{\mathrm{wt}(a)}(a|\kappa_m)$ が成り立ち、補題 3.7 から κ_m はヴィラソロ元を用いて書き下せるので、結局種々の $(a|L(-n_1)\cdots L(-n_k)\mathbb{1})$ を書き直せば跡 (3.5) が求まります。それを実行した結果が次の定理です。

定理 3.9. V と $g \in \mathrm{Aut}(V)$ は条件 2, 3 を満たすものとし、$d = \dim V_h$ とおく。

(1) V_h が $V^{0,+}$ 上の共形 2-デザインをなすとき、任意の $a^0 \in V_2$ について次の等式が成り立つ。

$$\mathrm{tr}_{V_h}\mathrm{o}(a^0) = \frac{2hd}{c}(a^0|\omega)$$

(2) V_h が $V^{0,+}$ 上の共形 4-デザインをなすとき、任意の $a^0, a^1 \in V_2$ について次の等式が成り立つ。

$$\mathrm{tr}_{V_h}\mathrm{o}(a^0)\mathrm{o}(a^1) = \frac{4hd(5h+1)}{c(5c+22)}(a^0|\omega)(a^1|\omega) + \frac{2hd(22h-c)}{c(5c+22)}(a^0|a^1)$$

(3) V_h が $V^{0,+}$ 上の共形 6-デザインをなすとき、任意の $a^0, a^1, a^2 \in V_2$ について次の等式が成り立つ。

$$\begin{aligned}
&\mathrm{tr}_{V_h}\mathrm{o}(a^0)\mathrm{o}(a^1)\mathrm{o}(a^2)\\
&= D_6(c)^{-1}\left(F_0^{(3)}(a^0|\omega)(a^1|\omega)(a^2|\omega) + F_1^{(3)}\,\mathrm{Sym}(a^0|\omega)(a^1|a^2) + F_2^{(3)}(a^0|a^1|a^2)\right)
\end{aligned}$$

ここで $(a^0|a^1|a^2) = (a^0a^1|a^2)$ であり、$\mathrm{Sym}(a^0|\omega)(a^1|a^2)$ は互いに異なる $(a^{i_0}|\omega)(a^{i_1}|a^{i_2})$ のすべての和を表し、$F_j^{(3)}$ $(0 \le j \le 2)$ は $\mathbb{Q}[c,d,h]$ の元である。

(4) V_h が $V^{0,+}$ 上の共形 8-デザインをなすとき、任意の $a^0, a^1, a^2, a^3 \in V_2$ について次の等式が成り立つ。

$$\begin{aligned}
&\mathrm{tr}_{V_h}\mathrm{o}(a^0)\mathrm{o}(a^1)\mathrm{o}(a^2)\mathrm{o}(a^3)\\
&= D_8(c)^{-1}\Big(F_0^{(4)}(a^0|\omega)(a^1|\omega)(a^2|\omega)(a^3|\omega) + F_1^{(4)}\,\mathrm{Sym}(a^0|\omega)(a^1|\omega)(a^2|a^3)\\
&\quad + F_2^{(4)}\,\mathrm{Sym}(a^0|\omega)(a^1|a^2|a^3) + F_3^{(4)}\,\mathrm{Sym}(a^0|a^1)(a^2|a^3) + F_4^{(4)}(a^0a^1|a^2a^3)\\
&\quad + F_5^{(4)}(a^0a^2|a^1a^3) + F_6^{(4)}(a^0a^3|a^1a^2)\Big)
\end{aligned}$$

ここで Sym は $(0,1,2,3)$ の置換で互いに異なる項が得られるものすべての和を表し、$F_j^{(4)}$ $(0 \le j \le 6)$ は $\mathbb{Q}[c,d,h]$ の元である。
(5) V_h が $V^{0,+}$ 上の共形 10-デザインをなすとき、任意の $a^0, a^1, a^2, a^3, a^4 \in V_2$ について次の等式が成り立つ。

$$
\begin{aligned}
&\mathrm{tr}_{V_h} \mathrm{o}(a^0)\mathrm{o}(a^1)\mathrm{o}(a^2)\mathrm{o}(a^3)\mathrm{o}(a^4) \\
&= D_{10}(c)^{-1} \Big(F_0^{(5)} (a^0|\omega)(a^1|\omega)(a^2|\omega)(a^3|\omega)(a^4|\omega) + F_1^{(5)}\, \mathrm{Sym}(a^0|\omega)(a^1|\omega)(a^2|\omega)(a^3|a^4) \\
&\quad + F_2^{(5)} \mathrm{Sym}(a^0|\omega)(a^1|\omega)(a^2|a^3|a^4) + F_3^{(5)} \mathrm{Sym}(a^0|\omega)(a^1|a^2)(a^3|a^4) \\
&\quad + F_4^{(5)} \big((a^0|\omega)(a^1a^2|a^3a^4) + (a^1|\omega)(a^0a^2|a^3a^4) + (a^2|\omega)(a^0a^1|a^3a^4) \\
&\qquad\qquad + (a^3|\omega)(a^0a^1|a^2a^4) + (a^4|\omega)(a^0a^1|a^2a^3) \big) \\
&\quad + F_5^{(5)} \big((a^0|\omega)(a^1a^3|a^2a^4) + (a^1|\omega)(a^0a^3|a^2a^4) + (a^2|\omega)(a^0a^3|a^1a^4) \\
&\qquad\qquad + (a^3|\omega)(a^0a^2|a^1a^4) + (a^4|\omega)(a^0a^2|a^1a^3) \big) \\
&\quad + F_6^{(5)} \big((a^0|\omega)(a^1a^4|a^2a^3) + (a^1|\omega)(a^0a^4|a^2a^3) + (a^2|\omega)(a^0a^4|a^1a^3) \\
&\qquad\qquad + (a^3|\omega)(a^0a^4|a^1a^2) + (a^4|\omega)(a^0a^3|a^1a^2) \big) \\
&\quad + F_7^{(5)}\, \mathrm{Sym}(a^0|a^1)(a^2|a^3|a^4) + F_8^{(5)} (a^0a^1a^2a^3a^4) + {\sum}^{*} F_{i_0i_1i_2i_3i_4}^{(5)} (a^{i_0}a^{i_1}|a^{i_2}|a^{i_3}a^{i_4}) \Big)
\end{aligned}
$$

ここで Sym は $(0,1,2,3,4)$ の置換で互いに異なる項が得られるものすべての和であり、$(a^0a^1a^2a^3a^4)\mathbb{1} = a^0_{(3)}a^1_{(2)}a^2_{(1)}a^3_{(0)}a^4$ である。最後の和 $\sum^*$ は $(1,2,3,4,5)$ の置換 (i_0,i_1,i_2,i_3,i_4) であって $(a^{i_0}a^{i_1}|a^{i_2}|a^{i_3}a^{i_4})$ が互いに異なるものすべての和である。$F_\bullet^{(5)}$ は $\mathbb{Q}[c,d,h]$ の元である。

上の定理に出てくる係数多項式 $F_\bullet^{(t)}$ のデータは大きすぎるので、ここでは省略します。詳細は [Y12] を参照してください。応用上重要となるのはヴィラソロ元の作用に関する跡公式です。

系 3.10. V と $g \in \mathrm{Aut}(V)$ は条件 2, 3 を満たすものとする。$e \in V_2$ を中心電荷 $c_e = 2(e|e)$ のヴィラソロ元とする。$t \le 5$ として V_h が $V^{0,+}$ 上の共形 $2t$-デザインをなすとき、$\mathrm{tr}_{V^h}\mathrm{o}(e)^t$ は次のように表される。

$$
\begin{aligned}
\mathrm{tr}_{V^h}\mathrm{o}(e) &= \frac{2hd}{c}(e|e) \quad (t=1) \\
\mathrm{tr}_{V^h}\mathrm{o}(e)^2 &= \frac{4hd(5h+1)}{c(5c+22)}(e|e)^2 + \frac{2hd(22h-c)}{c(5c+22)}(e|e) \quad (t=2) \\
\mathrm{tr}_{V^h}\mathrm{o}(e)^t &= D_{2t}(c)^{-1} \sum_{j=1}^{t} E_j^{(t)} (e|e)^j \quad (t=3,4,5)
\end{aligned}
$$

ここで $d = \dim V_h$ であり、 $E_\bullet^{(t)}$ は付録で与えられる $\mathbb{Q}[c,d,h]$ の元である。

講演ではこの公式のベビーモンスター頂点作用素超代数への応用についても紹介しました。この部分はすでに [Y09] でも論じていますので、紙面の都合もあり本稿では省略します。詳細は [Y09, Y12] を見てください。

注釈 3.11. 定理 3.9 にある公式において、a^i のひとつを ω/h とおけば、n 次の跡公式から $n-1$ 次の跡公式が得られます。[Ma01] において $V_1=0, \dim V_2>1$ を満たす頂点作用素代数が $\mathcal{S}^8$ 級ならば、その中心電荷は 24 であり、また $\dim V_2=196884$ となることが示されています。これはムーンシャイン頂点作用素代数 $V^\natural$ [FLM88] の中心電荷とグライス代数の次元であり、事実 $V^\natural$ はこの条件を満たす例になっています。一意性予想の類似として、この条件を満たす頂点作用素代数は $V^\natural$ しかないように安直には考えられます。筆者は定理 3.9 (4), (5) の仮定を満たす頂点作用素超代数は存在しそうにないと考えていますが、上記の方法で 5 次の公式からから 4 次へ、また 4 次の公式から 3 次の公式を導出しても特に矛盾は生じないため、あるいはこれまで知られていない、面白い頂点作用素超代数が存在するのかも知れません。(条件 1, 2, 3 を満たす非自明な $\mathcal{S}^6$ 級の頂点作用素超代数の例としてはベビーモンスター頂点作用素超代数 [DLM96, H95] があります。)

4 付録：跡公式のデータ

$E_3^{(3)}=8hd((70h^2+42h+8)c+29h^2-57h-2)$, $E_2^{(3)}=-12hd((14h+4)c^2+(-308h^2-93h-1)c+170h^2+34h)$, $E_1^{(3)}=2hd(4c^3+(-222h-1)c^2+(3008h^2+102h)c-1496h^2)$, $E_4^{(4)}=16hd((1050h^3+1260h^2+606h+108)c^2+(3305h^3-498h^2-701h+78)c-251h^3+918h^2-829h-6)$, $E_3^{(4)}=-48hd((210h^2+162h+36)c^3+(-4620h^3-3227h^2-861h+26)c^2+(-5614h^3+2915h^2-485h-2)c-1334h^3+2622h^2+92h)$, $E_2^{(4)}=4hd((366h+108)c^4+(-18864h^2-5929h-409)c^3+(241464h^3+77748h^2+11462h-2342)c^2+(37996h^3-69196h^2+44240h-2232)c-77140h^3-61872h^2+19756h-696)$, $E_1^{(4)}=2hd((1464h+487)c^4+(-61176h^2-13543h+2336)c^3+(660096h^3+84928h^2-43688h+2232)c^2+(64320h^3+61872h^2-19756h+696)c-206448h^3)$, $E_5^{(5)}=32hd((11550h^4+23100h^3+20130h^2+8580h+1440)c^2+(76675h^4+30590h^3-25615h^2-10898h+1608)c+3767h^4-18410h^3+29929h^2-16342h-24)$, $E_4^{(5)}=-160hd((2310h^3+3366h^2+1848h+360)c^3+(-50820h^4-64063h^3-39624h^2-9203h+402)c^2+(-190058h^4+21757h^3+50420h^2-8593h-6)c+14558h^4-53244h^3+48082h^2+348h)$, $E_3^{(5)}=8hd((13530h^2+11220h+2680)c^4+(-671220h^3-553445h^2-181091h-9774)c^3+(8317320h^4+6205020h^3+3186368h^2+33372h-81960)c^2+(13545380h^4-12577080h^3+2346592h^2+1321316h-122728)c+2750596h^4-4039320h^3-3472036h^2+1105848h-18528)$, $E_2^{(5)}=-4hd((1320h+420)c^5+(-182820h^2-101429h-18681)c^4+(5969040h^3+3213887h^2+527763h-122880)c^3+(-58143360h^4-27737760h^3-$

$6853602h^2+3391274h-184092)c^2+(-19549216h^4+50103960h^3-30930304h^2+2972472h-27792)c+17527600h^4+30443040h^3-11458480h^2+403680h)$, $E_1^{(5)} = -2hd(100c^6+(1470h+6495)c^5+(-501790h^2-424803h+40956)c^4+(15693120h^3+8719374h^2-2073438h+61364)c^3+(-141373440h^4-54143280h^3+27458268h^2-1866624h+9264)c^2+(-12282432h^4-30443040h^3+11458480h^2-403680h)c+47895936h^4)$.

参考文献

[DLM96] C. Dong, H. Li and G. Mason, Some twisted sectors for the moonshine module, Moonshine, the Monster, and related topics (South Hadley, MA, 1994), 25–43, Contemp. Math., 193, Amer. Math. Soc., Providence, RI, 1996.

[FHL93] I. Frenkel, Y.-Z. Huang and J. Lepowsky, On axiomatic approaches to vertex operator algebras and modules, *Memoirs Amer. Math. Soc.* **104**, 1993.

[FLM88] I.B. Frenkel, J. Lepowsky and A. Meurman, Vertex Operator Algebras and the Monster. Academic Press, New York, 1988.

[H95] G. Höhn, Selbstduale Vertexoperatorsuperalgebren und das Babymonster. Ph.D. thesis, Bonn 1995, Bonner Mathematische Schriften **286**. `arXiv:0706.0236`

[H08] G. Höhn, Conformal designs based on vertex operator algebras. *Adv. Math.* **217** (2008), 2301–2335.

[La99] C.H. Lam, Code vertex operator algebras under coordinate change, *Comm. Algebra* **27** (1999), 4587–4605.

[Li94] H. Li, Symmetric invariant bilinear forms on vertex operator algebras, *J. Pure Appl. Algebra* **96** (1994), 279–297.

[Ma01] A. Matsuo, Norton's trace formulae for the Griess algebra of a vertex operator algebra with larger symmetry. *Commun. Math. Phys.* **224** (2001), 565–591.

[Mi96] M. Miyamoto, Griess algebras and conformal vectors in vertex operator algebras. *J. Algebra* **179** (1996), 528–548.

[Y09] 山内 博,「拡大ヴィラソロ代数と関連する話題について」数理研講究録 1564 (2009年), 93–102.

[Y12] H. Yamauchi, Extended Griess algebras and Matsuo-Norton trace formulae, submitted, `arXiv:1206.3380`

[Za85] A.B. Zamolodchikov, Infinite additional symmetries in two dimensional conformal quantum field theory, *Theor. Math. Phys.* **65** (1985) 1205.

[Zh96] Y.Zhu, Modular invariance of characters of vertex operator algebras, *J. Amer. Math. Soc.* **9** (1996), 237–302.